Párhuzamos és Grid rendszerek (9. ea)

Párhuzamos algoritmusok tervezése, vizsgálata

Szeberényi Imre
BME IIT
<szebi@iit.bme.hu>

A San Diego Supercomputer Center
oktatási anyagának felhasználásával.

MŰEGYETEM 1782

PRAM modell

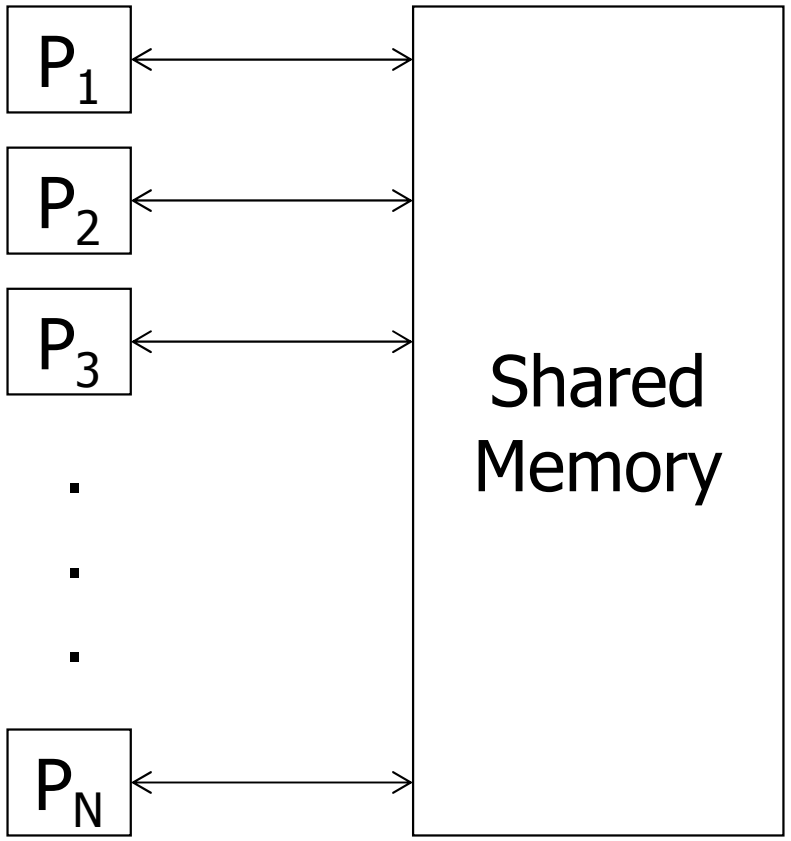
- Parallel Random Access Machine (PRAM)
- Elméleti modell a az algoritmusok vizsgálatához

Célja:

- Algoritmusok osztályozása, komplexitásának vizsgálata.
- Párhuzamosíthatóság elvi határainak felfedése.
- Új algoritmusok kifejlesztése.

PRAM modell /2

- Végtelen memória és processzorszám
- Nincs direkt kommunikáció a processzorok között:
  - csak a memóriában kommunikálhatnak
  - aszinkron működésűek
- A processzorok tetszőlegesen hozzáférnek a memóriához.
- Hozzáférés 1 ciklus
- Tipikusan minden processzor ugyanazt az algoritmust hajtja végre. (read, compute, write)



Memória hozzáférés

A modell több hozzáférési módot támogat:

- Exclusive Read (ER)
- Concurrent Read (CR)
- Exclusive Write (EW)
- Concurrent Write (CW)

Klasszikus PRAM modellek

- CREW (concurrent read, exclusive write)
  - leginkább használt
- CRCW (concurrent read, concurrent write)
  - legjobb teljesítményű
- EREW (exclusive read, exclusive write)
  - leginkább megszorító
  - legrealisztikusabb
- CROW (concurrent read, owner write)r write
- Common CRCW, Priority CRCW, …

PRAM példa #1

- Feladat:
  - Határozzuk meg egy láncolt lista hosszát
  - Minden listaelemben van egy változó (h), ami a mögötte levő lista hosszát mutatja

    if next[i] = NULL then h[i] ← 0

    else h[i] ← h[next[i]] + 1 fi
- A soros algoritmus O(n) komplexitású
- Az alábbi PRAM algorithmus O(log n) kompl.
  - miden listaelemhez rendeljünk egy processzort;
  - miden processzor 1. lépésben végezze el a következőt:

    if next[i] = NULL then h[i] ← 0

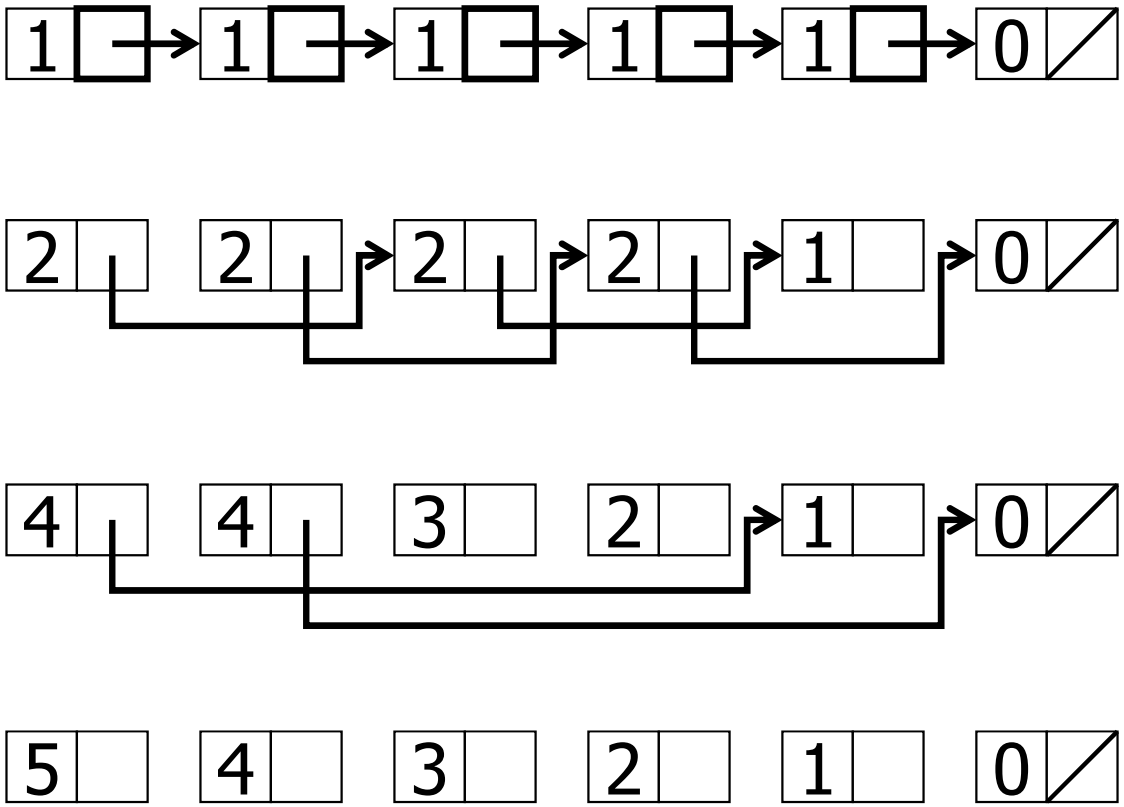
    else h[i] ← 1 fi

PRAM példa #1 /2

A további lépesekben pedig:

if next[i] ≠ NULL then h[i] ← h[i] + h[next[i]]

next[i] ← next[next[i]] fi



A lista mérete mindig 2-vel osztódik

PRAM példa #1 /3

Algoritmus:

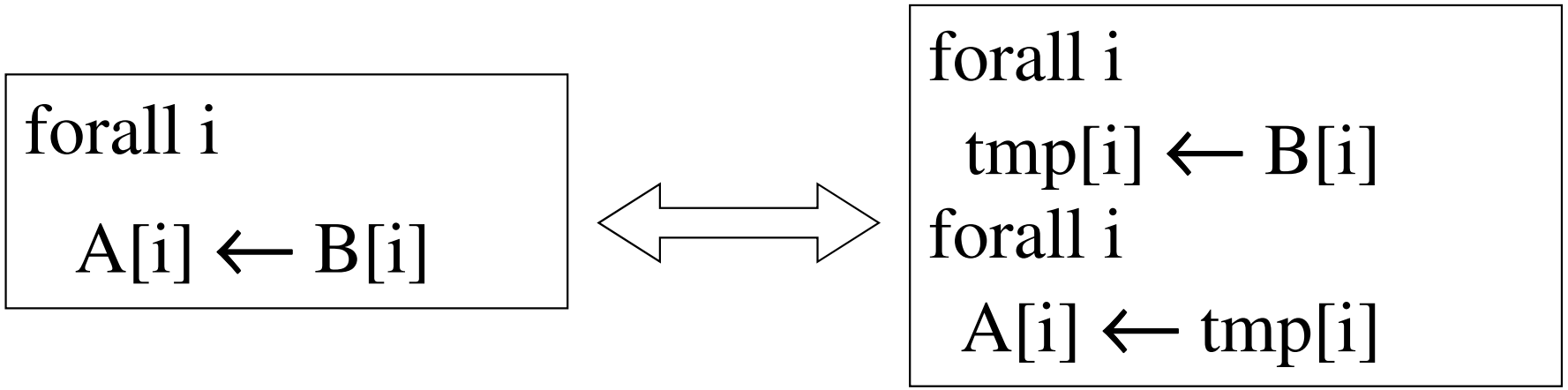
```
forall i do
   if next[i] = NULL then h[i] ← 0 else h[i] ← 1 fi
   mindaddig amíg van olyan i next[i] ≠ NULL
   forall i do
     if next[i] ≠ NULL then
          h[i] ← h[i] + h[next[i]]
          next[i] ← next[next[i]]
     fi
   od
od
```

Konzisztencia probléma

- Minden lépésben szinkronozottan kell történnie

`next[i]` ← `next[next[i]]`

- Ezért valójában ez történik:



amíg van olyan i ...

mindaddig amíg van olyan i next[i] ≠ NULL

Hogyan hajtható végre ez ?

- CRCW: Egy változót úgy írnak a processzorok, hogy az eredményük logikai ÉS kapcsolatba kerül.
- CREW: valami hasonló de csak 1 processzor írhat, amiből O(log n) lépés jön ki
- Így while ciklus átirható:

$$\text{for step} = 1 \text{ to } \lceil \log n \rceil$$

Milyen PRAM modell kell?

- Valójában nem kell a CW, csak CR:

  tmp[i] ← h[i] + h[next[i]]

- A CR is megszüntethető:

  tmp2[i] ← h[i]

  tmp[i] ← tmp2[i] + h[next[i]]

- Végül elegendő az EREW

Végső algoritmus

```
forall i do
  if next[i] = NULL then h[i] ← 0 else h[i] ← 1
  for step = 1 to ⌈log n⌉ do
    forall i do
      if next[i] ≠ NULL then
        tmp[i] ← h[i]
        h[i] ← tmp[i] + h[next[i]]
        next[i] ← next[next[i]]
      fi
    od
  od
od
```

O(1)

O(1)

O(log n)

O(log n)

Maximumkeresés

```
function smax(A,n)
        m ← a[1]
        for i ← 2 to n do
            m  ← max(m, A[i])
        od
        return m
 end
```

O(n)

Párhuzamos maximumkeresés

```
function smaxp(A,n)
        for i ← 1 to n/2 do
              B[i]  ← max(A[2i-1], A[2i])
         od
         if n = 2 then
              return B[1]
        else
              return smaxp(B, n/2)
        fi
 end
```

O(1)

O(log n)

O(log n)

Párhuzamos maximumkeresés /2

- Melyik PRAM modell?
  - EREW
- Mennyi munkát (w(n)) végzünk összesen n elem esetén p(n) processzorral?

$w(n) = p(n) * t(n)$

$p(n) = n/2$

$t(n) = O(\log n)$

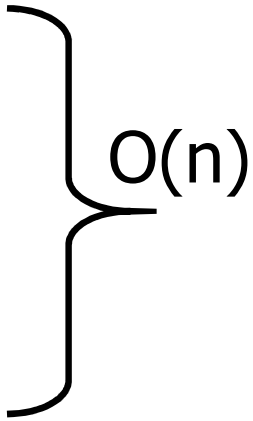
$w(n) = O(n \log n)$

Párhuzamos max #2 CRCW

```
function smaxp2(A,n)
    for i ← 1 to n do B[i] ← 1 od                          O(1)
    for j ← 1 to n do
        for i ← 1 to n do
            if A[i] < A[j] then B[i] ← 0 fi                 } O(1)
        od
    od
    for i ← 1 to n do
        if B[i] = 1 return A[i] fi                          } O(1)
    od
end
```

Prefix algoritmus

```
function prefix(A, n)
        B[1] ← a[1]
        for i ← 2 to n do
            B[i] ←B[i-1]+A[i]
        od
        return B
 end
```



Párhuzamos prefix algoritmus

```
function prefixp(A, n)
    B[1] ← a[1]
    if n > 1 then
        for i ← 1 to n/2 do    O(1)
            C[i] ←A[2i-1]+A[2i]  od
        D ← prefixp(C, n/2) O(log n)
        for i ← 1 to n/2 do    O(1)
            B[2i] ← D[i]  od
        for i ← 1 to n/2 do    O(1)
            B[2i-1] ← D[i-1]+A[2i-1] od
    fi
    return B
end
```

O(log n)

Roots of forest

P[i] = *j*, *ha* (*i*, *j*) egy szülő felé mutató él

P[i] = *i*, ha i gyökér

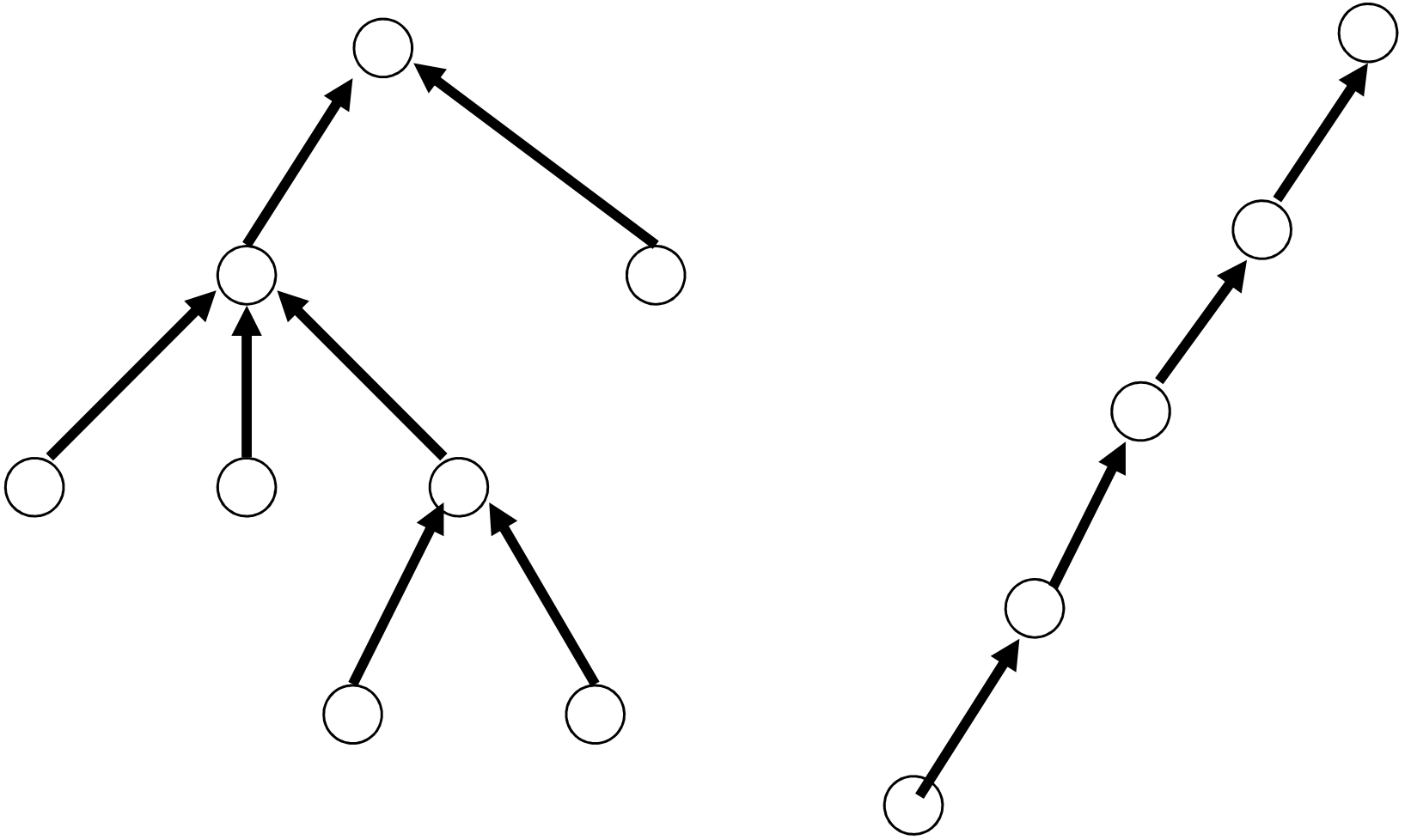
h – a legmagasabb fa magassága

```
for i ← 1 to n do
    S[i] ← P[i]
    while S[i] <> S[S[i]] do
        S[i] ← S[S[i]]
    od
od
```

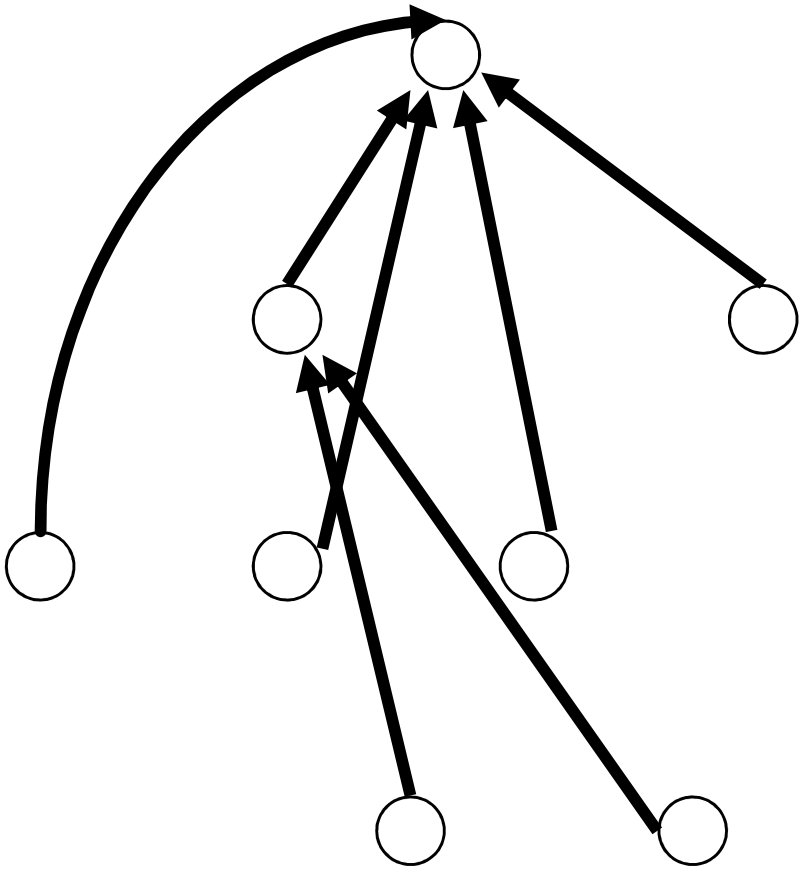
O(log h)

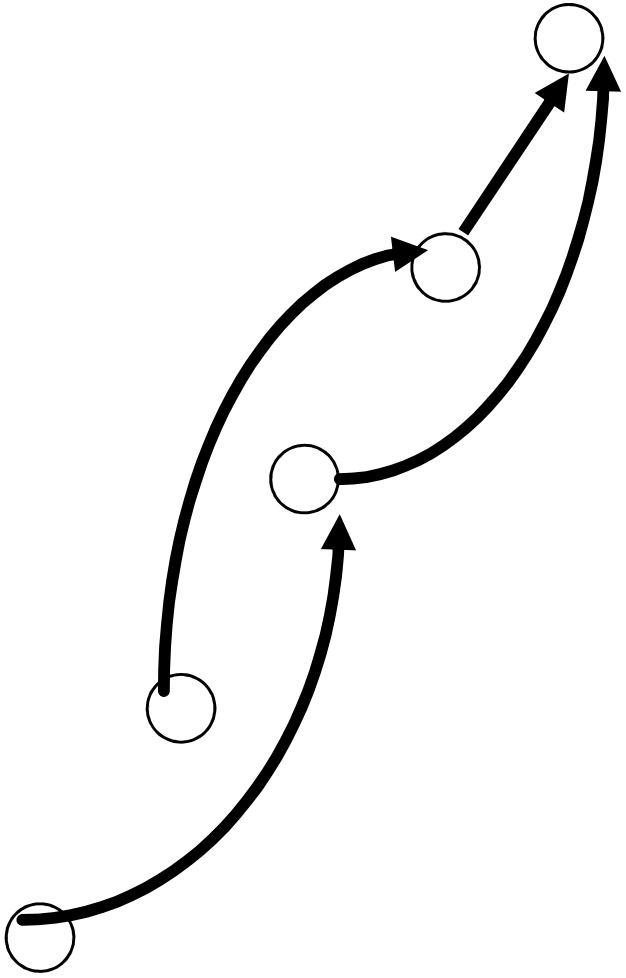
O(log h)

Kezdeti állapot

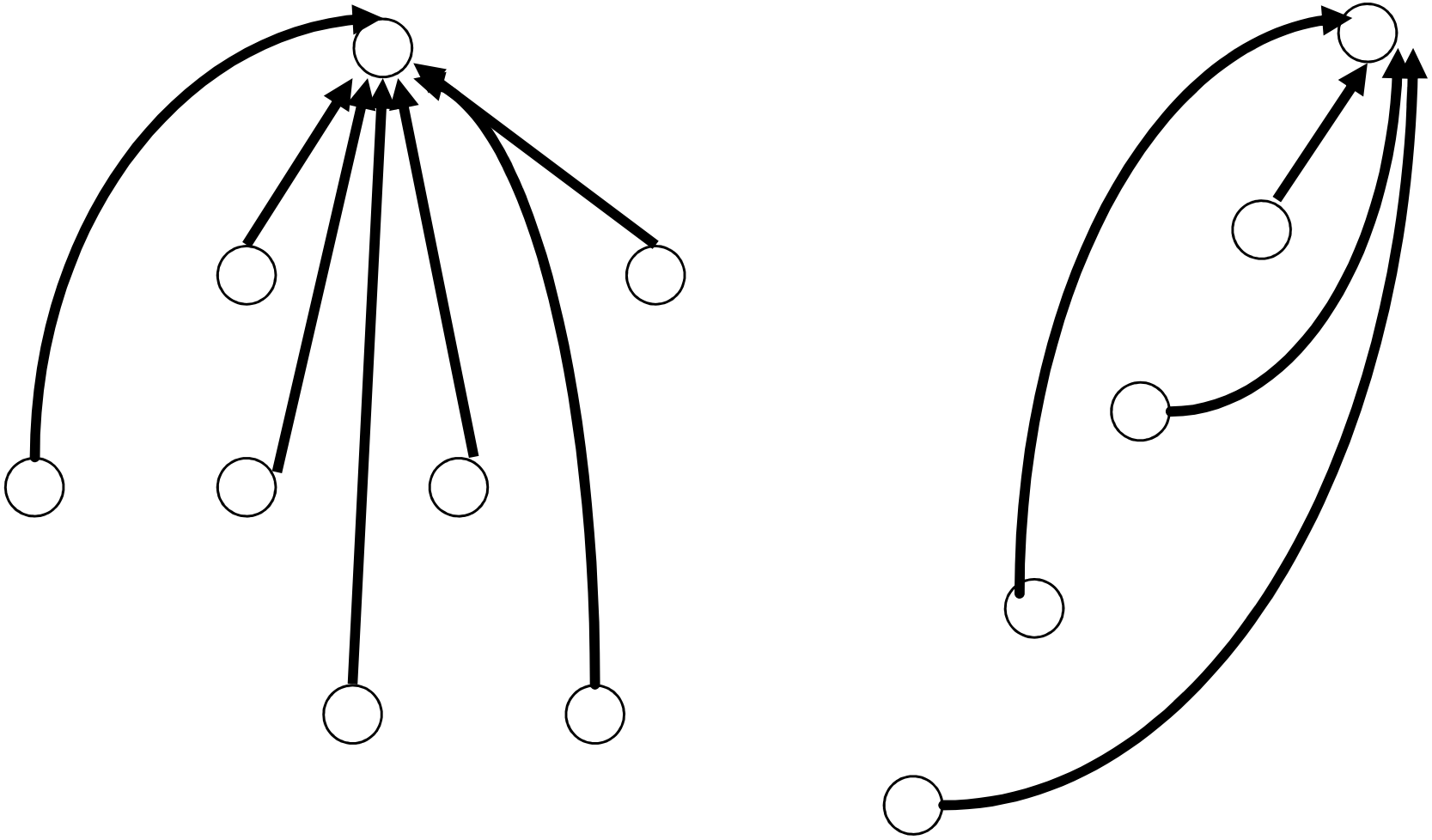


Első lépés





Végállapot

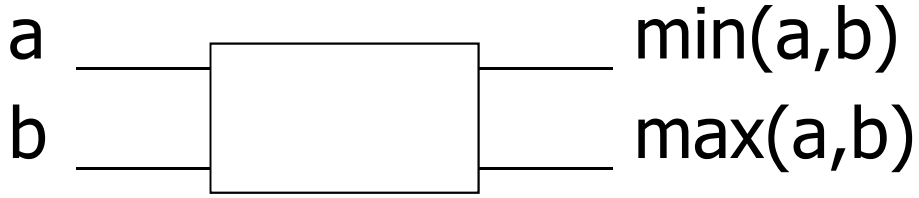


PRAM összefoglalás

- Algoritmusok osztályozása, komplexitásának vizsgálata.
- Párhuzamosíthatóság elvi határainak felfedése.
- Új algoritmusok kifejlesztése
- CRCW gyorsabb mint a EREW?
  - Bizonyítható, hogy CRCW maximum O(log n)-szer gyorsabb mint az EREW.

Rendezőhálózatok

- Műveleti elemek:
  - két számot kapnak, és rendezve kiadják azokaz a kimenetükön.



  - hálózatba kötve rendezésre képesek
  - alapvetően az architektúra érdekes

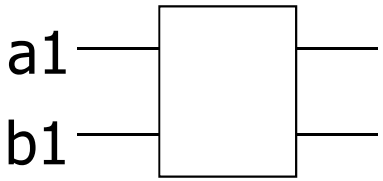
Összefésülés (merge)

Jelölések:

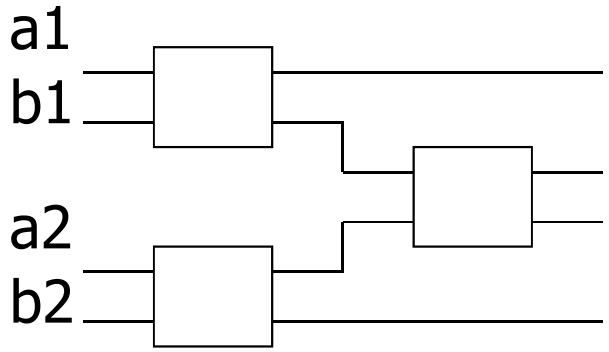
- $(c_1,c_2,...,c_n)$ rendezetlen lista
- $sort(c_1,c_2,...,c_n)$ rendezett lista
- $sorted(x_1,x_2,...,x_n)$ igaz, ha a lista rendezett
- ha $sorted(a_1,...,a_n)$ és $sorted(b_1,...,b_n)$ akkor
  $merge((a_1,...,a_n),(b_1,...,b_n)) = sort(a_1,...,a_n,b_1,...,b_n)$

A $merge_m$ hálózat két db 2^m elemű listát fésül össze.

m=0



m = 1



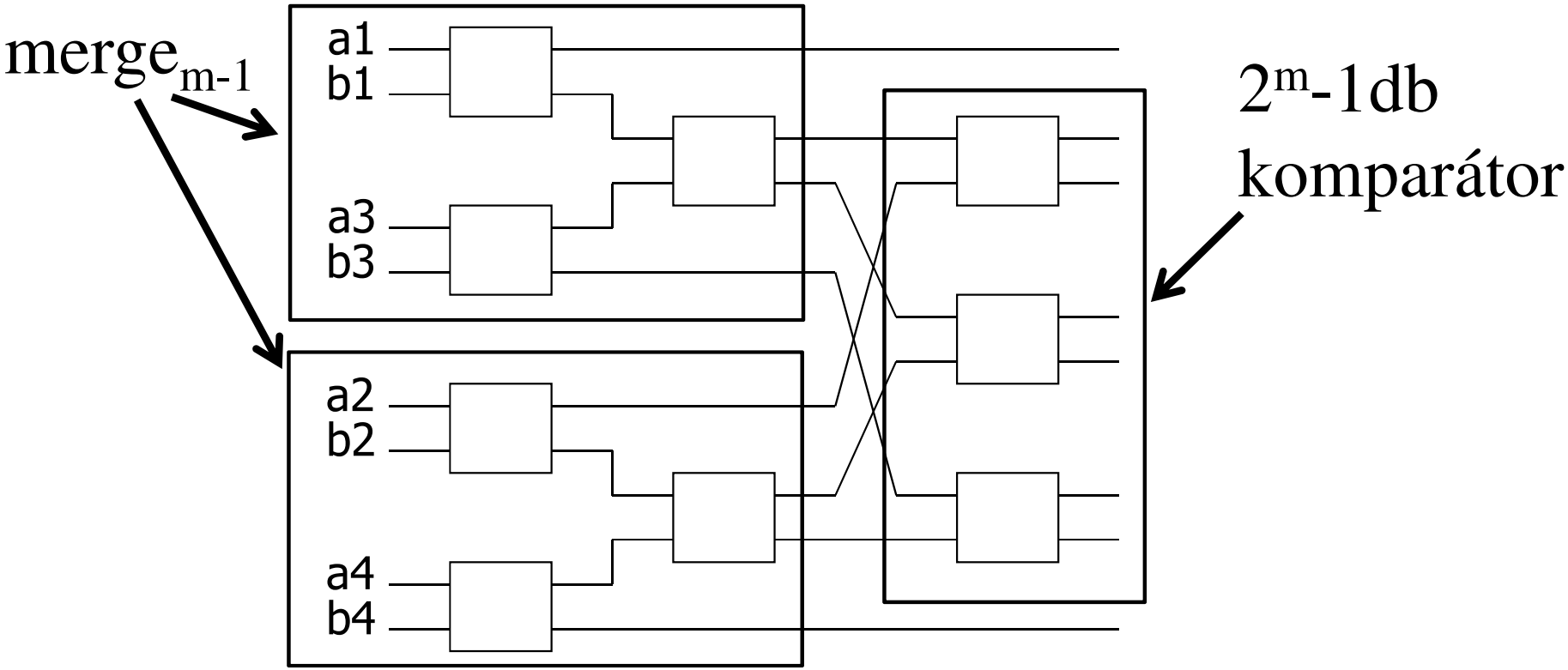
min(a1,b1)

min(max(a1,b1),min(a2,b2))

max(max(a1,b1),min(a2,b2))

max(a2,b2)

$m = 2$



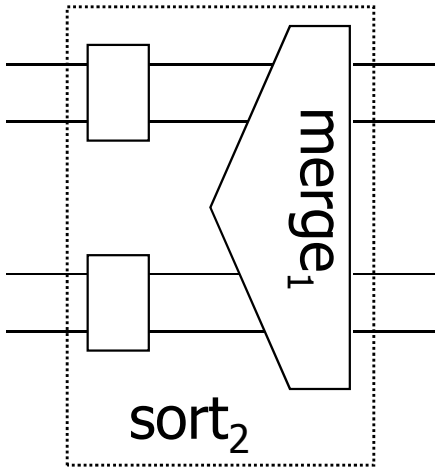
Az első merge$_{m-1}$ a páratlan elemeket, a második merge$_{m-1}$ a párosakat rendezi, majd a 2^m-1db komparátor ezeket összefésüli.

$Merge_m$ előállítása

- Adott:
  - sorted(a_1,...,a_{2n}) és
  - sorted(b_1,...,b_{2n})
- Legyen:
  - (d_1,...,d_{2n}) = merge((a_1,a_3,..,a_{2n-1}), (b_1,b_3,...,b_{2n-1})
  - (e_1,...,e_{2n}) = merge((a_2,a_4,..,a_{2n}),(b_2,b_4,...,b_{2n})
- Akkor:
  - sorted(d_1,min(d_2,e_1),max(d_2,e_1),..., min(d_{2n},e_{2n-1}),max(d_{2n},e_{2n-1}),e_{2n})

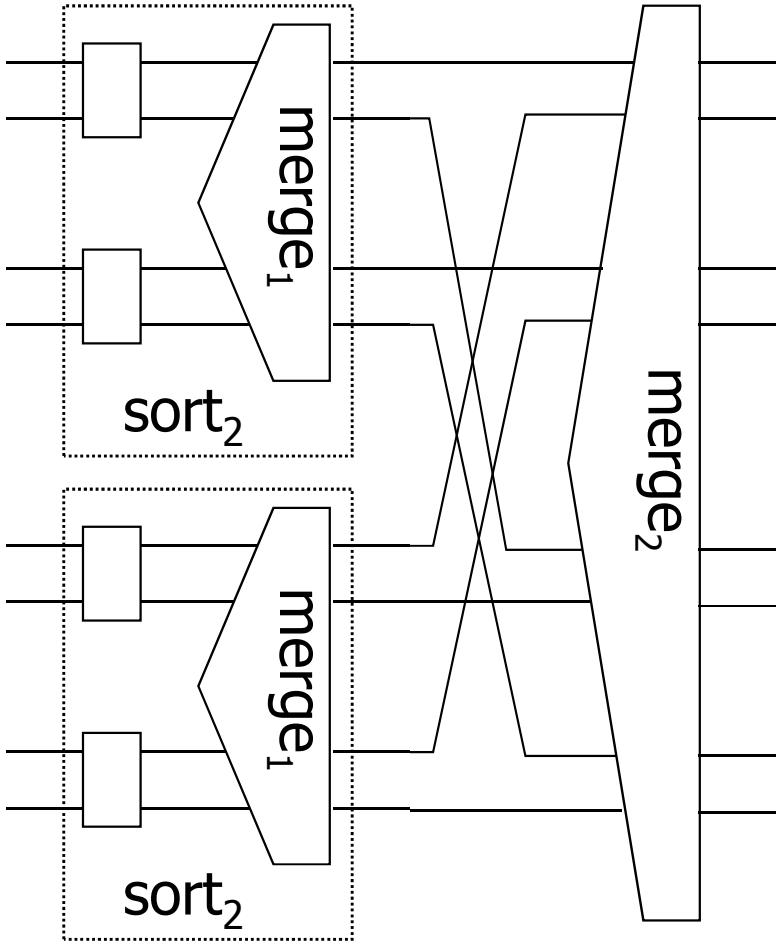
Rendezőhálózat

- $Sort_2$ network



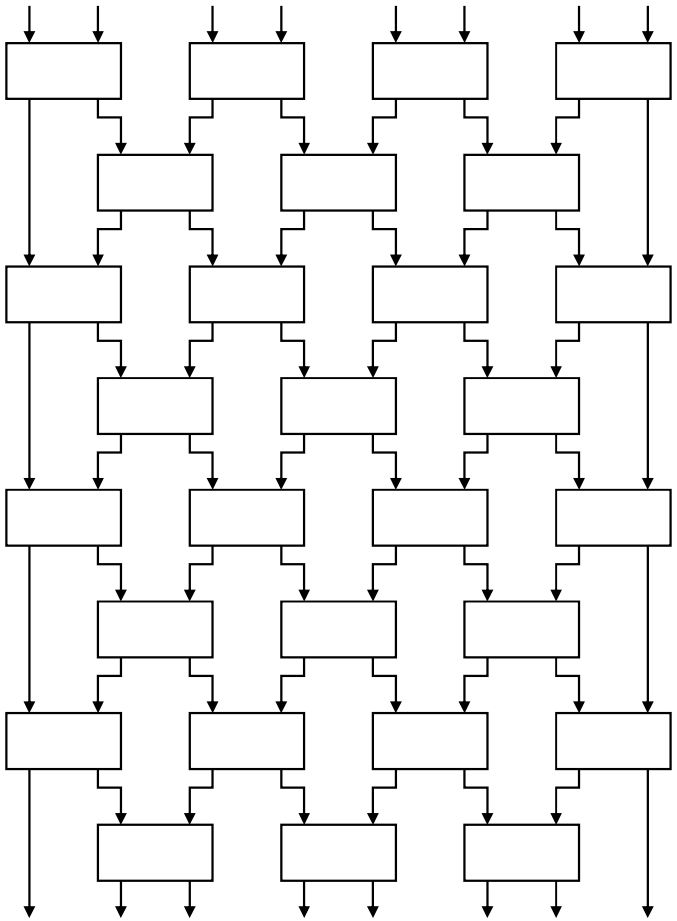
Sort 1st half of the list
Sort 2nd half of the list
Merge the results
Recursively

$Sort_3$ network

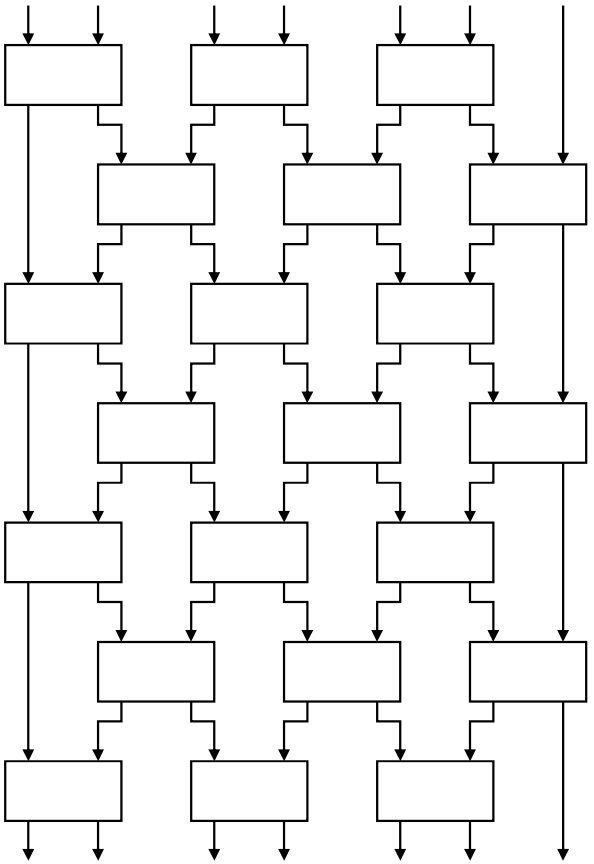


Páros-páratlan rendezőhálózat

n = 8

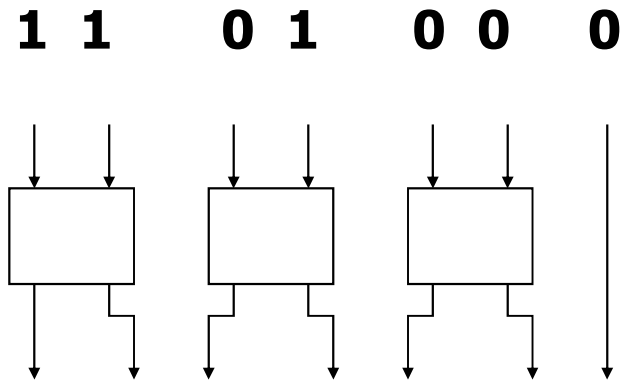


n = 7



„Bizonyítás”

- Legyen $(a_i)_{i=1,..,n}$ a rendezendő lista (0 és 1)
- Legyen k db 1-es a listában; j_0 pedig az utolsó 1-es helye

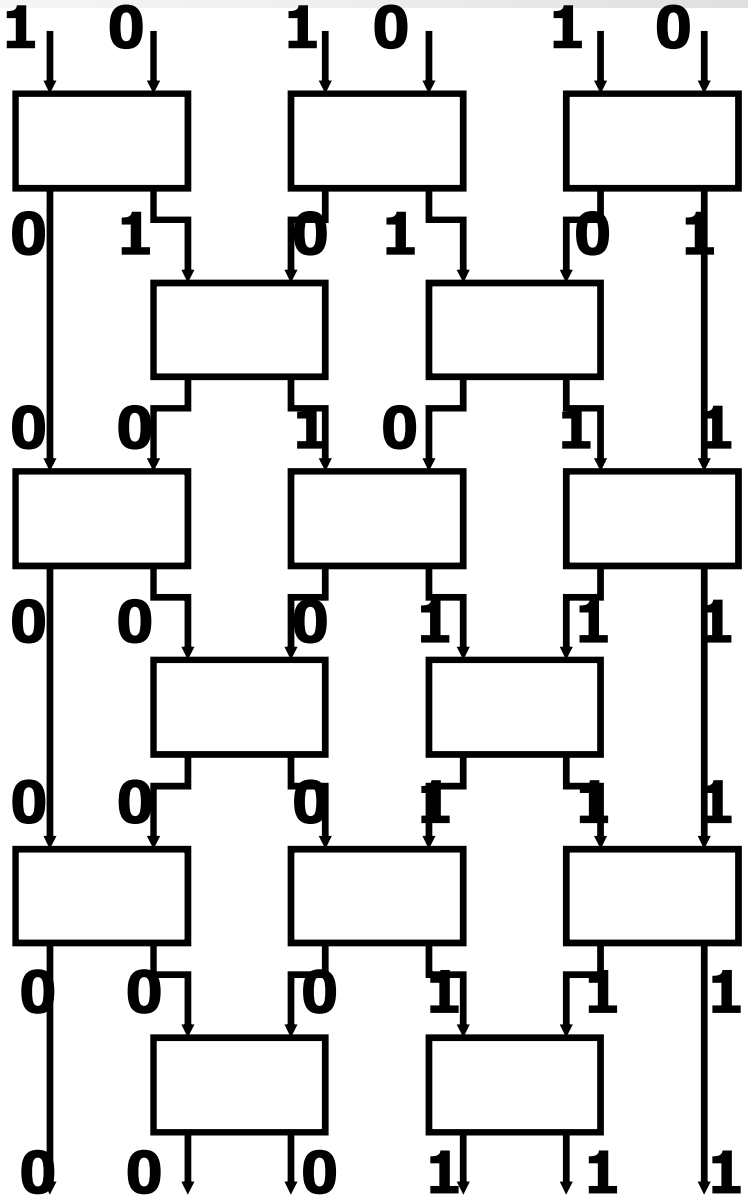


k = 3

j_0 = 4

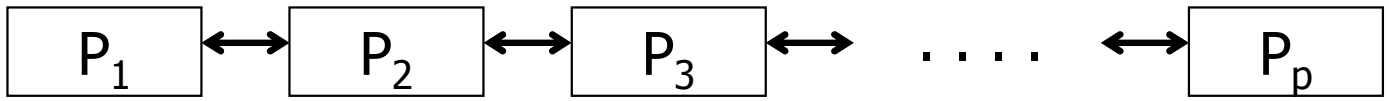
- Figyeljük meg, hogy 1-es soha nem mozog balra.
- Ha j_0 is páros, akkor az utolsó 1-es csak a következő szinten mozdul, ha j_0 páratlan, akkor az elsőn.
- Legfeljebb n szint kell, hogy a helyére érjen.

Példa n=6-ra



Rendezés egydimenziós tömbbel

- Legyen p db általános célú processzorból egy egy dimenziós tömbünk:

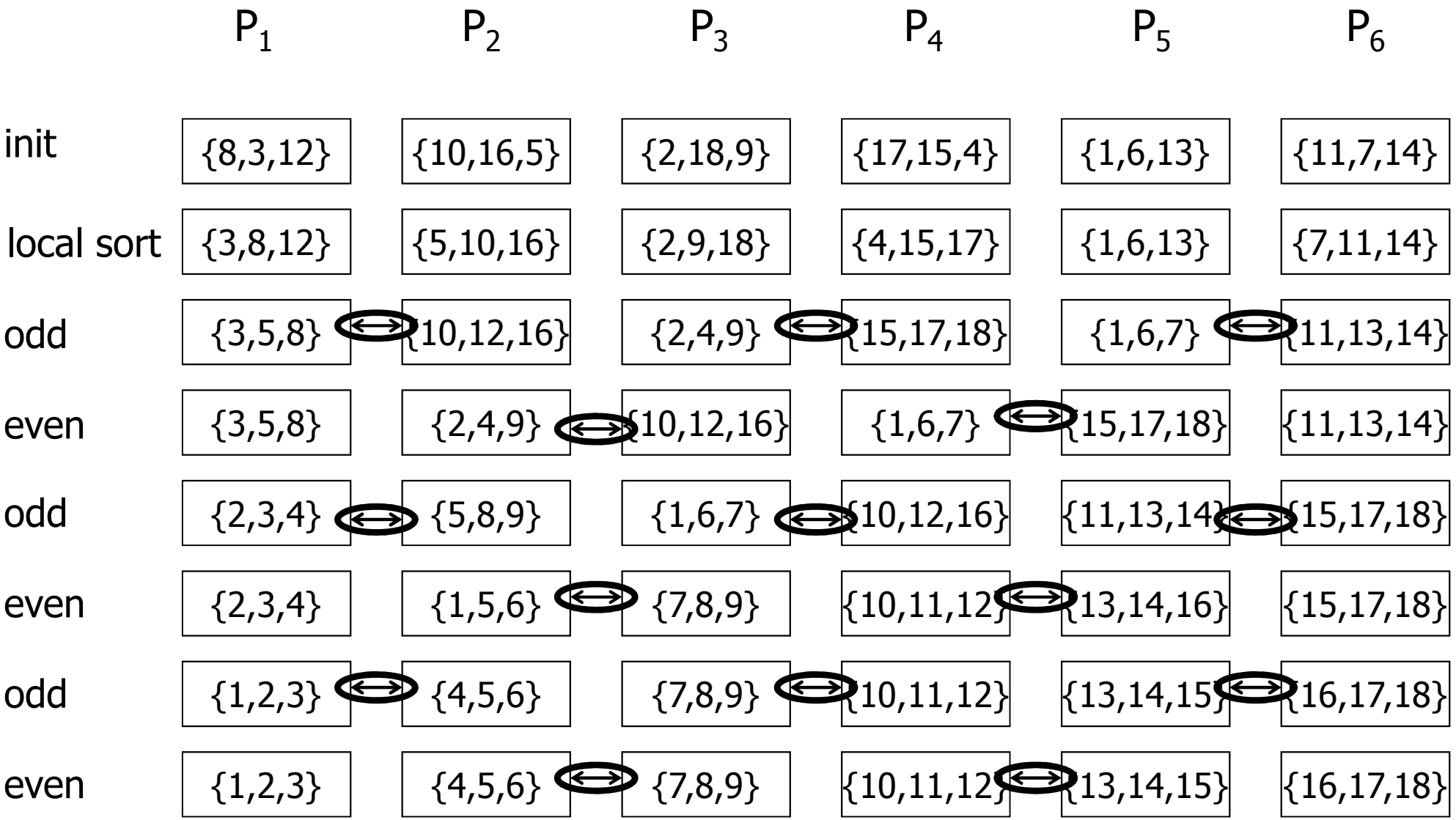


- Tegyük fel, hogy n osztható p-vel!
- Használjuk a páros-páratlan mintát rendezésre!

Működés

- Minden processzor n/p db elemet kap.
- Ezeket lokálisan rendezi
- Majd p lépésben felváltva előbb a páratlan, majd a páros processzorok adatot cserélnek jobboldali szomszédjukkal.
- Minden adatcserénél az adatokat összefésülik, és baloldali processzor a kisebb elemeket (n/p darabot), a jobboldali processzor pedig a nagyobb elemeket tartja meg.

Példa


P1
P2
P3
P4
P5
P6
init
{8,3,12}
{10,16,5}
{2,18,9}
{17,15,4}
{1,6,13}
{11,7,14}
local sort
{3,8,12}
{5,10,16}
{2,9,18}
{4,15,17}
{1,6,13}
{7,11,14}
odd
{3,5,8}
{10,12,16}
{2,4,9}
{15,17,18}
{1,6,7}
{11,13,14}
even
{3,5,8}
{2,4,9}
{10,12,16}
{1,6,7}
{15,17,18}
{11,13,14}
odd
{2,3,4}
{5,8,9}
{1,6,7}
{10,12,16}
{11,13,14}
{15,17,18}
even
{2,3,4}
{1,5,6}
{7,8,9}
{10,11,12}
{13,14,16}
{15,17,18}
odd
{1,2,3}
{4,5,6}
{7,8,9}
{10,11,12}
{13,14,15}
{16,17,18}
even
{1,2,3}
{4,5,6}
{7,8,9}
{10,11,12}
{13,14,15}
{16,17,18}