Párhuzamos és Grid rendszerek (9. ea)

Párhuzamos algoritmusok tervezése, vizsgálata

Szeberényi Imre
BME IIT

<szebi@iit.bme.hu>

A San Diego Supercomputer Center oktatási anyagának felhasználásával.

MŰEGYETEM 1782

PRAM modell

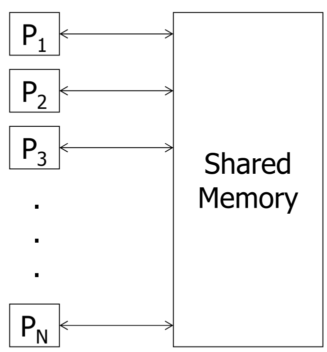
- Parallel Random Access Machine (PRAM)
- Elméleti modell a az algoritmusok vizsgálatához

Célja:

- Algoritmusok osztályozása, komplexitásának vizsgálata.
- Párhuzamosíthatóság elvi határainak felfedése.
- Új algoritmusok kifejlesztése.

PRAM modell /2

- Végtelen memória és processzorszám
- Nincs direkt kommunikáció a processzorok között:
  - csak a memóriában kommunikálhatnak
  - aszinkron működésűek
- A processzorok tetszőlegesen hozzáférnek a memóriához.
- Hozzáférés 1 ciklus
- Tipikusan minden processzor ugyanazt az algoritmust hajtja végre. (read, compute, write)



Memória hozzáférés

A modell több hozzáférési módot támogat:

- Exclusive Read (ER)
- Concurrent Read (CR)
- Exclusive Write (EW)
- Concurrent Write (CW)

Klasszikus PRAM modellek

- CREW (concurrent read, exclusive write)
  - leginkább használt
- CRCW (concurrent read, concurrent write)
  - legjobb teljesítményű
- EREW (exclusive read, exclusive write)
  - leginkább megszorító
  - legrealisztikusabb
- CROW (concurrent read, owner write)r write
- Common CRCW, Priority CRCW, …

PRAM példa #1

- Feladat:
  - Határozzuk meg egy láncolt lista hosszát
  - Minden listaelemben van egy változó (h), ami a mögötte levő lista hosszát mutatja

    if next[i] = NULL then h[i] ← 0

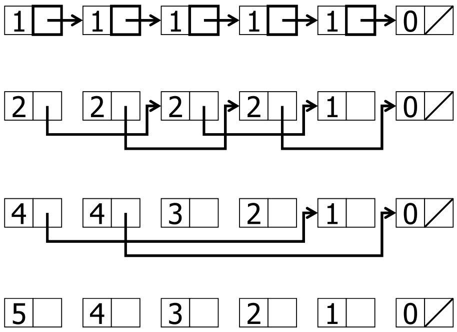
    else h[i] ← h[next[i]] + 1 fi
- A soros algoritmus O(n) komplexitású
- Az alábbi PRAM algorithmus O(log n) kompl.
  - miden listaelemhez rendeljünk egy processzort;
  - miden processzor 1. lépésben végezze el a következőt:

    if next[i] = NULL then h[i] ← 0

    else h[i] ← 1 fi

PRAM példa #1 /2

A további lépesekben pedig:
if next[i] ≠ NULL then h[i] ← h[i] + h[next[i]]
next[i] ← next[next[i]] fi



A lista mérete mindig 2-vel osztódik

PRAM példa #1 /3

Algoritmus:
forall i do
  if next[i] = NULL then h[i] ← 0 else h[i] ← 1 fi
  mindaddig amíg van olyan i next[i] ≠ NULL
  forall i do
    if next[i] ≠ NULL then
      h[i] ← h[i] + h[next[i]]
      next[i] ← next[next[i]]
    fi
  od
od

Konzisztencia probléma

- Minden lépésben szinkronozottan kell történnie
  `next[i] ← next[next[i]]`
- Ezért valójában ez történik:

forall i A[i] ← B[i]	forall i tmp[i] ← B[i] forall i A[i] ← tmp[i]

amíg van olyan i ...

mindaddig amíg van olyan i next[i] $\neq$ NULL

Hogyan hajtható végre ez ?

- CRCW: Egy változót úgy írnak a processzorok, hogy az eredményük logikai ÉS kapcsolatba kerül.
- CREW: valami hasonló de csak 1 processzor írhat, amiből O(log n) lépés jön ki
- Így while ciklus átirható:

  for step = 1 to $\lceil \log n \rceil$

Milyen PRAM modell kell?

- Valójában nem kell a CW, csak CR:

  tmp[i] $\leftarrow$ h[i] + h[next[i]]
- A CR is megszüntethető:

  tmp2[i] $\leftarrow$ h[i]

  tmp[i] $\leftarrow$ tmp2[i] + h[next[i]]
- Végül elegendő az EREW

Végső algoritmus

```
forall i do
  if next[i] = NULL then h[i] ← 0 else h[i] ← 1   O(1)
  for step = 1 to ⌈log n⌉ do
    forall i do
      if next[i] ≠ NULL then
        tmp[i] ← h[i]                      O(1)    O(log n)    O(log n)
        h[i] ← tmp[i] + h[next[i]]
        next[i] ← next[next[i]]
      fi
    od
  od
od
```

Maximumkeresés

```
function smax(A,n)
       m ← a[1]
       for i ← 2 to n do                  O(n)
           m  ← max(m, A[i])
       od
       return m
end
```


Párhuzamos maximumkeresés

```
function smaxp(A,n)
      for i ← 1 to n/2 do
          B[i]  ← max(A[2i-1], A[2i])   O(1)
       od                                        O(log n)
       if n = 2 then
           return B[1]
      else
           return smaxp(B, n/2)     O(log n)
      fi
end
```


Párhuzamos maximumkeresés /2

- Melyik PRAM modell?
  - EREW
- Mennyi munkát (w(n)) végzünk összesen n elem esetén p(n) processzorral?

  w(n) = p(n) * t(n)

  p(n) = n/2

  t(n) = O(log n)

  w(n) = O(n log n)

Párhuzamos max #2 CRCW

```
function smaxp2(A,n)
    for i ← 1 to n do B[i]  ← 1 od   O(1)
    for j ← 1 to n do
        for i ← 1 to n do
            if A[i] < A[j] then B[i]  ← 0 fi   O(1)
        od
    od
    for i ← 1 to n do
        if B[i] = 1 return A[i] fi   O(1)
    od
end
```


Prefix algoritmus

```
function prefix(A, n)
    B[1] ← a[1]
    for i ← 2 to n do              O(n)
        B[i] ←B[i-1]+A[i]
    od
    return B
end
```


Párhuzamos prefix algoritmus

```
function prefixp(A, n)
  B[1] ← a[1]
  if n > 1 then
    for i ← 1 to n/2 do   O(1)
      C[i] ←A[2i-1]+A[2i]  od
    D ← prefixp(C, n/2) O(log n)          O(log n)
    for i ← 1 to n/2 do   O(1)
      B[2i] ← D[i]  od
    for i ← 1 to n/2 do   O(1)
      B[2i-1] ← D[i-1]+A[2i-1] od
  fi
  return B
end
```

Roots of forest

P[i] = j, ha (*i, j*) egy szülő felé mutató él

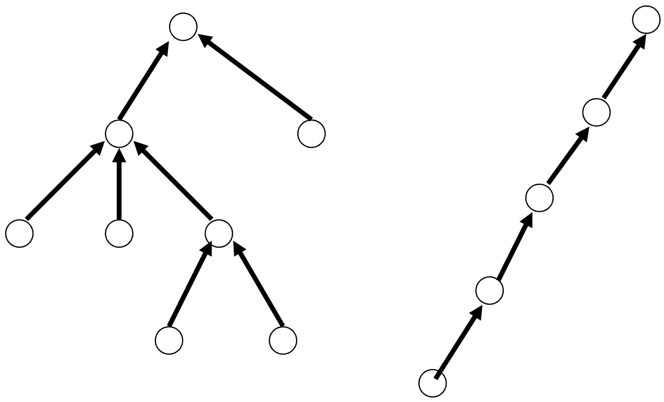
P[i] = i, ha i gyökér

h – a legmagasabb fa magassága

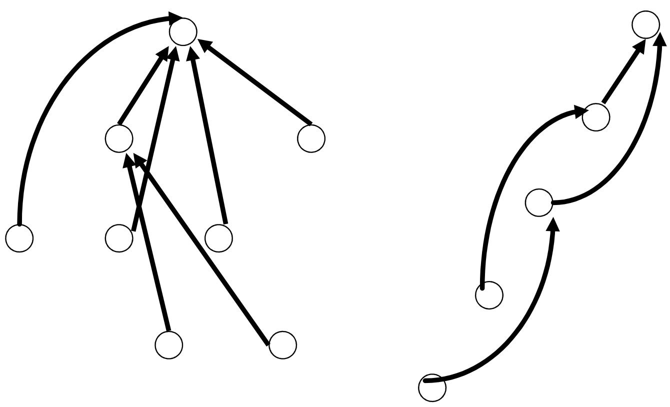
```
for i ← 1 to n do
   S[i] ← P[i]
   while S[i] <> S[S[i]] do    O(log h)
      S[i] ← S[S[i]]
   od
od
```

O(log h)

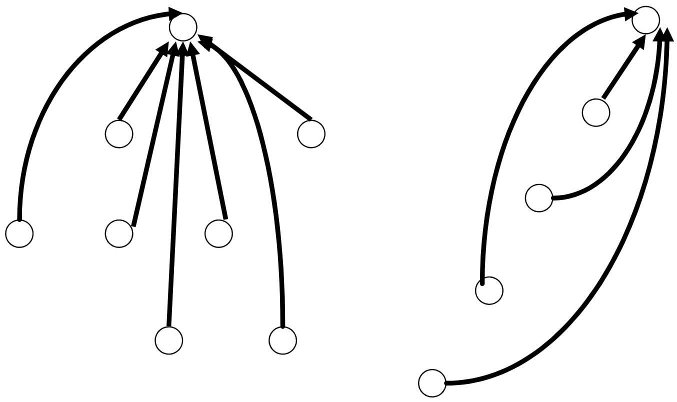
Kezdeti állapot



Első lépés



Végállapot

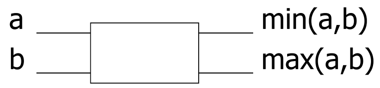


PRAM összefoglalás

- Algoritmusok osztályozása, komplexitásának vizsgálata.
- Párhuzamosíthatóság elvi határainak felfedése.
- Új algoritmusok kifejlesztése
- CRCW gyorsabb mint a EREW?
  - Bizonyítható, hogy CRCW maximum O(log n)-szer gyorsabb mint az EREW.

Rendezőhálózatok

- Műveleti elemek:
  - két számot kapnak, és rendezve kiadják azokaz a kimenetükön.



  - hálózatba kötve rendezésre képesek
  - alapvetően az architektúra érdekes

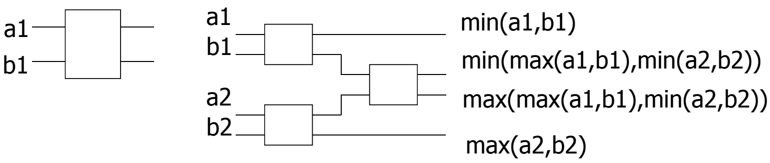
Összefésülés (merge)

Jelölések:

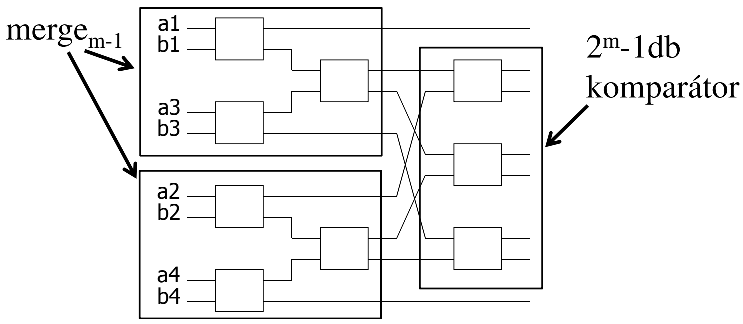
– $(c_1,c_2,...,c_n)$ rendezetlen lista
– $sort(c_1,c_2,...,c_n)$ rendezett lista
– $sorted(x_1,x_2,...,x_n)$ igaz, ha a lista rendezett
– ha $sorted(a_1,...,a_n)$ és $sorted(b_1,...,b_n)$ akkor
$merge((a_1,...,a_n),(b_1,...,b_n)) = sort(a_1,...,a_n,b_1,...,b_n)$

A $merge_m$ hálózat két db 2^m elemű listát fésül össze.

m=0 m = 1



m = 2



Az első $merge_{m-1}$ a páratlan elemeket, a második $merge_{m-1}$ a párosakat rendezi, majd a 2^m-1db komparátor ezeket összefésüli.

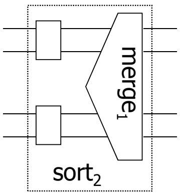
$Merge_m$ előállítása

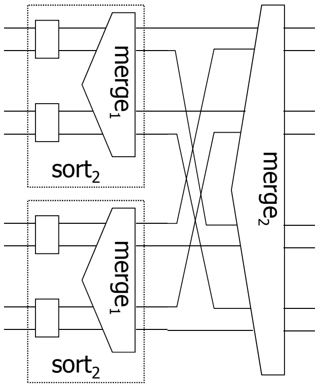
- Adott:
  – $sorted(a_1,...,a_{2n})$ és
  – $sorted(b_1,...,b_{2n})$
- Legyen:
  – $(d_1,...,d_{2n}) = merge((a_1,a_3,..,a_{2n-1}),$
  $(b_1,b_3,...,b_{2n-1})$
  – $(e_1,...,e_{2n}) = merge((a_2,a_4,..,a_{2n}),(b_2,b_4,...,b_{2n})$
- Akkor:
  – $sorted(d_1,min(d_2,e_1),max(d_2,e_1),...,$
  $min(d_{2n},e_{2n-1}),max(d_{2n},e_{2n-1}),e_{2n})$

Rendezőhálózat

- Sort$_2$ network

Sort$_3$ network

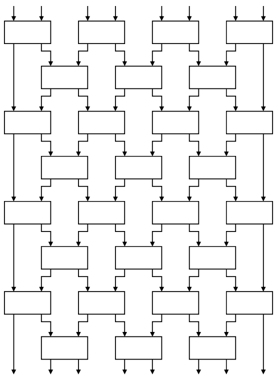




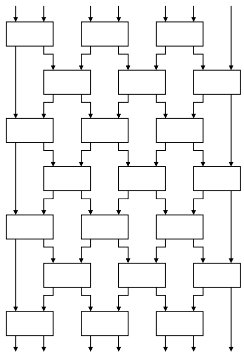
Sort 1st half of the list
Sort 2nd half of the list
Merge the results
Recursively

Páros-páratlan rendezőhálózat

n = 8



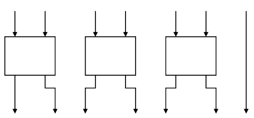
n = 7



„Bizonyítás”

- Legyen $(a_i)_{i=1,..,n}$ a rendezendő lista (0 és 1)
- Legyen k db 1-es a listában; j_0 pedig az utolsó 1-es helye

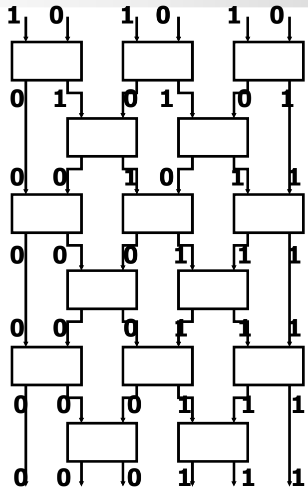
1 1 0 1 0 0 0



k = 3
j_0 = 4

- Figyeljük meg, hogy 1-es soha nem mozog balra.
- Ha j_0 is páros, akkor az utolsó 1-es csak a következő szinten mozdul, ha j_0 páratlan, akkor az elsőn.
- Legfeljebb n szint kell, hogy a helyére érjen.

Példa n=6-ra



Rendezés egydimenziós tömbbel

- Legyen p db általános célú processzorból egy egy dimenziós tömbünk:

$P_1 \leftrightarrow P_2 \leftrightarrow P_3 \leftrightarrow \;....\; \leftrightarrow P_p$

- Tegyük fel, hogy n osztható p-vel!
- Használjuk a páros-páratlan mintát rendezésre!

Működés

- Minden processzor n/p db elemet kap.
- Ezeket lokálisan rendezi
- Majd p lépésben felváltva előbb a páratlan, majd a páros processzorok adatot cserélnek jobboldali szomszédjukkal.
- Minden adatcserénél az adatokat összefésülik, és baloldali processzor a kisebb elemeket (n/p darabot), a jobboldali processzor pedig a nagyobb elemeket tartja meg.

Példa

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
init	{8,3,12}	{10,16,5}	{2,18,9}	{17,15,4}	{1,6,13}	{11,7,14}
local sort	{3,8,12}	{5,10,16}	{2,9,18}	{4,15,17}	{1,6,13}	{7,11,14}
odd	{3,5,8}	{10,12,16}	{2,4,9}	{15,17,18}	{1,6,7}	{11,13,14}
even	{3,5,8}	{2,4,9}	{10,12,16}	{1,6,7}	{15,17,18}	{11,13,14}
odd	{2,3,4}	{5,8,9}	{1,6,7}	{10,12,16}	{11,13,14}	{15,17,18}
even	{2,3,4}	{1,5,6}	{7,8,9}	{10,11,12}	{13,14,16}	{15,17,18}
odd	{1,2,3}	{4,5,6}	{7,8,9}	{10,11,12}	{13,14,15}	{16,17,18}
even	{1,2,3}	{4,5,6}	{7,8,9}	{10,11,12}	{13,14,15}	{16,17,18}